1 Definitions

Definition 1

$$traces(P \circ Q) = traces(P) \cup traces(Q)$$

$$\begin{aligned} failures(P \circ Q) = \{(s, X)| \\ &(s, X) \in failures(P) \cup failures(Q), \\ &g(s, P) \Rightarrow (s, X) \in failures(P), \\ &g(s, Q) \Rightarrow (s, X) \in failures(Q)\} \end{aligned}$$

where $g(s, P)$ requires that the trace s is not refused by process P, and it is defined as follows.

$$\begin{aligned} g(\langle\rangle, P) &= true \\ g(s\hat{}\langle\alpha\rangle, P) &= g(s, P) \wedge ((s, \{\alpha\}) \notin failures(P)) \end{aligned}$$

Definition 2

$$traces(P\$) = traces(P)$$

$$\begin{aligned} failures(P\$) = failures(P) \cup \{(s, X)| \\ &\exists Y.((s, Y) \in failures(P) \wedge X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!), \\ &\exists \alpha.(s\hat{}\langle\alpha\rangle \in traces(P) \wedge \alpha \notin X))\} \end{aligned}$$

The condition $(X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!)$ means sending events can be refused in $P\$$, and the last condition $(\alpha \notin X)$ requires that an event is not refused at least. Then, the following Theorem 2 holds as expected.

Definition 3

$$traces(\Box_{x \in C} @x \rightarrow P(x)) = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle\alpha\rangle\hat{}s | \alpha \in C, s \in traces(P(\alpha))\}$$

$$\begin{aligned} failures(\Box_{x \in C} @x \rightarrow P(x)) = \{(\langle\rangle, X) | X \cap C = \phi\} \\ \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s, X) | \alpha \in C, (s, X) \in failures(P(\alpha))\} \end{aligned}$$

Definition 4

$$traces(\sqcap_{x \in C} @x \rightarrow P(x)) = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle\alpha\rangle\hat{}s | \alpha \in C, s \in traces(P(\alpha))\}$$

$$\begin{aligned} failures(\sqcap_{x \in C} @x \rightarrow P(x)) = \{(\langle\rangle, X) | \exists \alpha \in C. \alpha \notin X\} \\ \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s, X) | \alpha \in C, (s, X) \in failures(P(\alpha))\} \end{aligned}$$

Definition 5

$$traces(P \triangleright Q) = traces(P) \cup traces(Q)\}$$

$$failures(P \triangleright Q) \quad = \quad failures(Q) \cup \{(s, X) | s \neq \langle\rangle, (s, X) \in failures(P)\}$$

2 Theorems

Theorem 1

$$
\begin{array}{ll}
(1) & P_i \sqsubseteq_T \bigcirc_{i \in I} @ P_i \\
(2) & \bigcirc_{i \in I} @ (\alpha \to P_i) =_F \alpha \to (\bigcirc_{i \in I} @ P_i) \\
(3) & (i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j) \Rightarrow \\
 & \bigcirc_{i \in I} @ (\alpha_i \to P_i) =_F \Box_{i \in I} @ (\alpha_i \to R_i)
\end{array}
$$

Theorem 2

$$
\begin{array}{ll}
(1) & (I_! = \phi) \Rightarrow \\
 & (\Box_{i \in I} @ (\alpha_i \to B_i))\$ =_F \Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i \$) \\
(2) & (I_! \neq \phi \wedge I_? = \phi) \Rightarrow \\
 & (\Box_{i \in I} @ (\alpha_i \to B_i))\$ =_F \sqcap_{i \in I_!} @ (\alpha_i \to B_i \$) \\
(3) & (I_! \neq \phi \wedge I_? \neq \phi) \Rightarrow (\Box_{i \in I} @ (\alpha_i \to B_i))\$ \\
 & =_F \sqcap_{i \in I_!} @ (\alpha_i \to B_i \$) \rhd \Box_{j \in I_?} @ (\alpha_j \to B_j \$)
\end{array}
$$

where $I_! = I \cap A_!$, $I_? = I \cap A_?$.

3 Theorem 2(1) 受信イベント

$$(I_! = \phi) \Rightarrow (\Box_{i \in I} @ (\alpha_i \to B_i))\$ =_F \Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i \$)$$

$I_! = \phi$ より $I = I_?$ なので、

$$(\Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i))\$ =_F \Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i \$)$$

が言えればよい。

$$P = \Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i)$$

とおく。

3.1 traces

左辺について、Definition 2 と Definition 3 より、

$$
\begin{aligned}
traces((\Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i))\$) &= traces(\Box_{i \in I_?} @ (\alpha_i \to B_i)) \\
&= \{\langle\rangle\} \cup \{\langle\alpha\rangle\hat{\ }s \mid \alpha \in I_?, s \in traces(B_\alpha)\}
\end{aligned}
$$

右辺について、Definition 2 と Definition 3 より、

$$\begin{aligned} traces(\Box_{i \in I_?} @(\alpha_i \to B_i\$)) &= \{\langle\rangle\} \cup \{\langle\alpha\rangle\hat{\ }s | \alpha \in I_?, s \in traces(B_\alpha\$)\} \\ &= \{\langle\rangle\} \cup \{\langle\alpha\rangle\hat{\ }s | \alpha \in I_?, s \in traces(B_\alpha)\} \end{aligned}$$

以上より、右辺と左辺の traces は等しい。

3.2 failures

(1) $failures(P\$) \subseteq failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$ を証明する。

$$(s, X) \in failures(P\$)$$

とする。Definition 2 より、

$$(s, X) \in failures(P)$$

または、

$$\exists Y.(s, Y) \in failures(P), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, \exists \beta . s\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(P), \beta \notin X$$

(i) $(s, X) \in failures(P)$ の場合：
Definition 3 より、

$$(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_? = \phi\} \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in I_?, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$$

(i-1) $(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_? = \phi\}$ の場合：
すなわち、$s = \langle\rangle, X \cap I_? = \phi$. よって、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

(i-2) $(s, X) \in \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in I_?, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$ の場合：
すなわち、$s = \langle\alpha\rangle\hat{\ }s', \alpha \in I_?, (s', X) \in failures(B_\alpha)$. Definition 2 より、

$$(s', X) \in failures(B_\alpha\$).$$

よって、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

(ii) ある Y と β で $(s, Y) \in failures(P), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(P), \beta \notin X$ の場合：
Definition 3 より、

$$(s, Y) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_? = \phi\} \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in I_?, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$$

(i-1) $(s,Y)\in\{(\langle\rangle,X)|X\cap I_? = \phi\}$ の場合：
　すなわち、$s=\langle\rangle, Y\cap I_?=\phi$. 仮定より、$I_?\subseteq\mathcal{A}_?$。$X\subseteq Y\cup\mathcal{A}_!$ であるので、$X\cap I_?=\phi$。よって、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle,X)\in failures(\Box_{x\in I_?}@x\to B_x\$)$$

(i-2) $(s,Y)\in\{(\langle\alpha\rangle\hat{}s',X)|\alpha\in I_?,(s',X)\in failures(B_\alpha)\}$ の場合：
　すなわち、$s=\langle\alpha\rangle\hat{}s'$, $\alpha\in I_?,(s',Y)\in failures(B_\alpha)$. また、$\langle\alpha\rangle\hat{}s'\hat{}\langle\beta\rangle\in traces(P)$ であるので、Definition 3 より、$s'\hat{}\langle\beta\rangle\in traces(B_\alpha)$。以上をまとめると、

$$(s',Y)\in failures(B_\alpha), X\subseteq Y\cup\mathcal{A}_!, s'\hat{}\langle\beta\rangle\in traces(B_\alpha), \beta\notin X$$

であるので、Definition 2 より、

$$(s',X)\in failures(B_\alpha\$)$$

よって、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle,X)\in failures(\Box_{x\in I_?}@x\to B_x\$)$$

　(2) $failures(\Box_{x\in I_?}@x\to B_x\$)\subseteq failures(P\$)$ を証明する。
　$(s,X)\in failures(\Box_{x\in I_?}@x\to B_x\$)$ とする。Definition 3 より、$(s,X)\in\{(\langle\rangle,X)|X\cap I_?=\phi\}\cup\{(\langle\alpha\rangle\hat{}s',X)|\alpha\in I_?,(s',X)\in failures(B_\alpha\$)\}$
(i) $(s,X)\in\{(\langle\rangle,X)|X\cap I_?=\phi\}$ の場合：
　すなわち、$s=\langle\rangle$, $X\cap I_?=\phi$. よって、Definition 2 と Definition 3 より、

$$(\langle\rangle,X)\in failures((\Box_{x\in I_?}@x\to B_x)\$)=failures(P\$)$$

(ii) $(s,X)\in\{(\langle\alpha\rangle\hat{}s',X)|\alpha\in I_?,(s',X)\in failures(B_\alpha\$)\}$ の場合：
　すなわち、$s=\langle\alpha\rangle\hat{}s'$, $\alpha\in I_?,(s',X)\in failures(B_\alpha\$)$. Definition 2 より、ある Y と β で、

$$(s',Y)\in failures(B_\alpha), X\subseteq Y\cup\mathcal{A}_!, s'\hat{}\langle\beta\rangle\in traces(B_\alpha), \beta\notin X$$

よって、Definition 3 より、

$$(s,X)\in failures(\Box_{x\in I_?}@x\to B_x)\subseteq failures(P\$)$$

4　Theorem 2(2) 送信イベント

$$I_!\subseteq\mathcal{A}_!, I_!\neq\phi, P=\Box_{x\in I_!}@x\to B_x$$

とする。このとき、

$$P\$=_F\sqcap_{x\in I_!}@x\to B_x\$$$

が成り立つ。

4.1 証明：

(1) $failures(P\$) \subseteq failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$ を証明する。

$(s, X) \in failures(P\$)$ とする。Definition 2 より、$(s, X) \in failures(P)$ または、$\exists Y.(s, Y) \in failures(P), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, \exists \beta. s\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(P), \beta \notin X$

(i) $(s, X) \in failures(P)$ の場合：

Definition 3 より、

$$\begin{aligned}(s, X) \quad \in \quad & \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_! = \phi\} \\ & \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}\end{aligned}$$

(i-1) $(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_! = \phi\}$ の場合：

すなわち、$s = \langle\rangle$, $X \cap I_! = \phi$. $X \cap I_! = \phi$ と $I_! \neq \phi$ より、ある $\alpha \in I_!$ で $\alpha \notin X$。よって、Definition 4 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$$

(i-2) $(s, X) \in \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$ の場合：

すなわち、

$$s = \langle\alpha\rangle\hat{}s', \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha)$$

Definition 2 より、$(s', X) \in failures(B_\alpha\$)$. よって、Definition 4 より、$(\langle\rangle, X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$

(ii) ある Y と β で $(s, Y) \in failures(P), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(P), \beta \notin X$ の場合：

Definition 3 より、

$$(s, Y) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_! = \phi\} \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$$

(i-1) $(s, Y) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_! = \phi\}$ の場合：

すなわち、$s = \langle\rangle$, $Y \cap I_! = \phi$.

ここで、 $\langle\rangle\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(P)$ であるので、Definition 3 より、$\beta \in I_!$. すなわち、仮定より、$\beta \in I_!, \beta \notin X$ よって、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$$

(i-2) $(s, Y) \in \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$ の場合：

すなわち、$s = \langle\alpha\rangle\hat{}s'$, $\alpha \in I_!, (s', Y) \in failures(B_\alpha)$. また、$\langle\alpha\rangle\hat{}s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(P)$ であるので、Definition 3 より、$s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha)$。以上をまとめると、

$$(s', Y) \in failures(B_\alpha), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha), \beta \notin$$

であるので、Definition 2 より、

$$(s', X) \in failures(B_\alpha\$)$$

よって、Definition 4 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$$

(2) $failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$) \subseteq failures(P\$)$ を証明する。

$(s, X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$ とする。Definition 4 より、$(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | \exists \alpha \in I_!. \alpha \notin X\} \cup \{(\langle\alpha\rangle \hat{}\, s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha\$)\}$

(i) $(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | \exists \alpha \in I_!. \alpha \notin X\}$ の場合：

すなわち、ある α で、$s = \langle\rangle$, $\alpha \in I_!. \alpha \notin X$. ....(*1)

$Y = \mathcal{A}_? \cup (\mathcal{A}_! - C)$ とおくと、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle, Y) \in failures(\Box_{x \in I_!} @x \to B_x) = failures(P)$$

また、(*1) と Definition 3 より、

$$\langle\alpha\rangle \in traces(\Box_{x \in I_!} @x \to B_x) = traces(P)$$

ここで、

$$X \subseteq (\mathcal{A}_! \cup \mathcal{A}_?) = \mathcal{A}_? \cup (\mathcal{A}_! - C) \cup \mathcal{A}_! = Y \cup \mathcal{A}_!$$

以上をまとめると、

$$\begin{array}{rcl} (\langle\rangle, Y) & \in & failures(\Box_{x \in I_!} @x \to B_x) = failures(P), \\ X & \subseteq & Y \cup \mathcal{A}_!, \\ \langle\alpha\rangle & \in & traces(P), \\ \alpha & \notin & X \end{array}$$

すなわち、

$$(s, X) \in failures(P\$).$$

(ii) $(s, X) \in \{(\langle\alpha\rangle \hat{}\, s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha\$)\}$ の場合：

すなわち、$s = \langle\alpha\rangle \hat{}\, s'$, $\alpha \in I_!$, $(s', X) \in failures(B_\alpha\$)$. Definition 2 より、ある Y と β で、$(s', Y) \in failures(B_\alpha)$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$, $s' \hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha)$, $\beta \notin X$。よって、Definition 3 より、

$$(s, X) \in failures(\Box_{x \in I_!} @x \to B_x) \subseteq failures(P\$)$$

5 Theorem 2(3) 送信イベント＆受信イベント

$$I_! \subseteq \mathcal{A}_!, I_! \neq \phi,$$

$$I_? \subseteq \mathcal{A}_?, I_? \neq \phi,$$

$$I = I_! \cup I_?,$$

$$P = \Box_{x \in C} @x \to B_x,$$

$$R = (\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

とする。このとき、

$$P\$ =_F R$$

が成り立つ。

5.1 証明：

(1) $failures(P\$) \subseteq failures(R)$ を証明する。
$(s, X) \in failures(P\$)$ とする。Definition 2 より、
$(s, X) \in failures(P)$ または、$\exists Y.(s, Y) \in failures(P)$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$, $\exists \beta. s\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(P)$, $\beta \notin X$
(i) $(s, X) \in failures(P)$ の場合：
Definition 3 より、

$$(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I = \phi\} \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in I, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$$

(i-1) $(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I = \phi\}$ の場合：すなわち、$s = \langle\rangle$, $X \cap I = \phi$. ここで、$I = I_! \cup I_?$ なので、$X \cap I_? = \phi$. よって、Definition 4 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

さらに、Definition 5 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures((\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)) \subseteq failures(R)$$

(i-2) $(s, X) \in \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in C, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$ の場合：
すなわち、

$$s = \langle\alpha\rangle\hat{\ }s', \alpha \in C, (s', X) \in failures(B_\alpha)$$

(i-2-1) $\alpha \in I_?$ の場合。Definition 4 より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

よって、Definition 5 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures((\sqcap_{x\in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x\in I_?} @x \to B_x\$)) \subseteq failures(R)$$

(i-2-1) $\alpha \in I_?$ の場合。
Definition 3 より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) \in failures(\Box_{x\in I_?} @x \to B_x\$)$$

よって、Definition 5 より、

$$\begin{aligned}(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) &\in failures((\sqcap_{x\in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x\in I_?} @x \to B_x\$)) \\ &\subseteq failures(R)\end{aligned}$$

(i-2-2) $\alpha \in I_!$ の場合。
Definition 4 より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) \in failures(\sqcap_{x\in I_?} @x \to B_x\$)$$

よって、

$$\langle\alpha\rangle\hat{\ }s' \neq \langle\rangle$$

であるので、Definition 5 より、

$$\begin{aligned}(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) &\in failures((\sqcap_{x\in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x\in I_?} @x \to B_x\$)) \\ &\subseteq failures(R)\end{aligned}$$

(ii) ある Y と β で $(s, Y) \in failures(P)$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$, $s\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(P)$, $\beta \notin X$ の場合：
Definition 3 より、

$$(s, Y) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap C = \phi\} \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in C, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$$

(i-1) $(s, Y) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap C = \phi\}$ の場合：
すなわち、$s = \langle\rangle$, $Y \cap C = \phi$.
$Y \cap C = \phi$, $I_? \subseteq C$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$ より、$X \cap I_? = \phi$ を導ける。よって、Definition 3 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\Box_{x\in I_?} @x \to B_x\$)$$

さらに、Definition 5 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures((\sqcap_{x\in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x\in I_?} @x \to B_x\$)) \subseteq failures(R)$$

(i-2) $(s, Y) \in \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in C, (s', X) \in failures(B_\alpha)\}$ の場合：

すなわち、$s = \langle\alpha\rangle\hat{}s'$, $\alpha \in C, (s', Y) \in failures(B_\alpha)$. また、$\langle\alpha\rangle\hat{}s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(P)$ であるので、Definition 3 より、

$$s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha)$$

以上をまとめると、

$$(s', Y) \in failures(B_\alpha), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha), \beta \notin X$$

であるので、Definition 2 より、

$$(s', X) \in failures(B_\alpha\$).$$

よって、Definition 3,8 より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)$$

または、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

すなわち、Definition 5 より、

$$(s, X) \in failures((\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$) \triangleright (\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)) \subseteq failures(R)$$

(2) $failures(R) \subseteq failures(P\$)$ を証明する。
$(s, X) \in failures(R)$ とする。Definition 5 より、

$$(s, X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$$

または、

$$(s, X) \in \{(s, X) | s \neq \langle\rangle, (s, X) \in failures(\sqcap_{x \in I_!} @x \to B_x\$)\}$$

(i) $(s, X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x\$)$ の場合：
すなわち、

$$(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_? = \phi\} \cup \{(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) | \alpha \in I_?, (s', X) \in failures(B_\alpha\$)\}$$

(i-1) $(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | X \cap I_? = \phi\}$ の場合：
すなわち、$s = \langle\rangle$, $X \cap I_? = \phi$. よって、Definition 2 と Definition 3 より、

$$(\langle\rangle, X) \in failures(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x)$$

$I_? \neq \phi$ なので、$\exists\beta \in I_?$.
$X \cap I_? = \phi$ なので、$\beta \notin X$, $\langle\beta\rangle \in traces(\Box_{x \in I_?} @x \to B_x)$,
$Y = X - \mathcal{A}_!$ とおくと、$Y \cap (I_! \cup I_?) = \phi$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$.

以上より、

$$(\langle\rangle, X) \in \{(s, X) | \exists Y.(s, Y) \in failures(\,\Box_{x\in C}@x \to B_x),$$
$$X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!,$$
$$\exists \beta.s\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(\,\Box_{x\in C}@x \to B_x), \beta \notin X\}$$

よって、

$$failures((\,\Box_{x\in C}@x \to B_x)\$) = failures(P\$)$$

(i-2) $(s, X) \in \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in I_?, (s', X) \in failures(B_\alpha\$)\}$ の場合：
すなわち、$s = \langle\alpha\rangle\hat{\ }s'$, $\alpha \in I_?$, $(s', X) \in failures(B_\alpha\$)$. Definition 2 より

$$(s', X) \in failures(B_\alpha)$$

またはある Y と β で、

$$(s', Y) \in failures(B_\alpha), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s'\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha), \beta \notin X$$

(i-2-1) $(s', X) \in failures(B_\alpha)$ の場合：$s = \langle\alpha\rangle\hat{\ }s'$, $\alpha \in I_? \subseteq C$, $(s', X) \in failures(B_\alpha)$ よって、Definition 3 より、

$$\begin{aligned}(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) &\in failures(\,\Box_{x\in C}@x \to B_x)\\ &\subseteq failures((\,\Box_{x\in C}@x \to B_x)\$)\\ &= failures(P\$)\end{aligned}$$

(i-2-2) ある Y と β で $(s', Y) \in failures(B_\alpha), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s'\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha), \beta \notin X$ の場合：$s = \langle\alpha\rangle\hat{\ }s'$, $\alpha \in I_? \subseteq C$, $(s', Y) \in failures(B_\alpha)$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$, $s'\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha)$, $\beta \notin X$ よって、Definition 3 より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', Y) \in failures(\,\Box_{x\in C}@x \to B_x),$$

ここで、

$$\langle\alpha\rangle\hat{\ }s'\hat{\ }\langle\beta\rangle \in traces(\,\Box_{x\in C}@x \to B_x)$$

より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) \in failures((\,\Box_{x\in C}@x \to B_x)\$) = failures(P\$)$$

(ii) $(s, X) \in \{(s, X) | s \neq \langle\rangle, (s, X) \in failures(\sqcap_{x\in I_!}@x \to B_x\$)\}$ の場合：
すなわち、

$$s \neq \langle\rangle$$
$$(s, X) \in \{(\langle\rangle, X) | \exists \alpha \in I_!.\alpha \notin X\}$$
$$\cup \quad \{(\langle\alpha\rangle\hat{\ }s', X) | \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha\$)\}$$

すなわち、

$$s = \langle\alpha\rangle\hat{}s', \alpha \in I_!, (s', X) \in failures(B_\alpha\$)$$

Definition 2 より

$$(s', X) \in failures(B_\alpha)$$

またはある Y と β で、

$$(s', Y) \in failures(B_\alpha), X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!, s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha), \beta \notin X$$

(ii-1) $(s', X) \in failures(B_\alpha)$ の場合：

$$s = \langle\alpha\rangle\hat{}s', \alpha \in I_! \subseteq C, (s', X) \in failures(B_\alpha)$$

よって、Definition 3 より、

$$\begin{aligned}
(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) &\in failures(\Box_{x\in C}@x \to B_x) \\
&\subseteq failures((\Box_{x\in C}@x \to B_x)\$) \\
&= failures(P\$)
\end{aligned}$$

(ii-2) ある Y と β で $(s', Y) \in failures(B_\alpha)$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$, $s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha)$, $\beta \notin X$ の場合：

すなわち $s = \langle\alpha\rangle\hat{}s'$, $\alpha \in I_! \subseteq C$, $(s', Y) \in failures(B_\alpha)$, $X \subseteq Y \cup \mathcal{A}_!$, $s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(B_\alpha)$, $\beta \notin X$

よって、Definition 3 より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{}s', Y) \in failures(\Box_{x\in C}@x \to B_x)$$

ここで、

$$\langle\alpha\rangle\hat{}s'\hat{}\langle\beta\rangle \in traces(\Box_{x\in C}@x \to B_x)$$

より、

$$(\langle\alpha\rangle\hat{}s', X) \in failures((\Box_{x\in C}@x \to B_x)\$) = failures(P\$)$$